UNIDAD DE APRENDIZAJE V

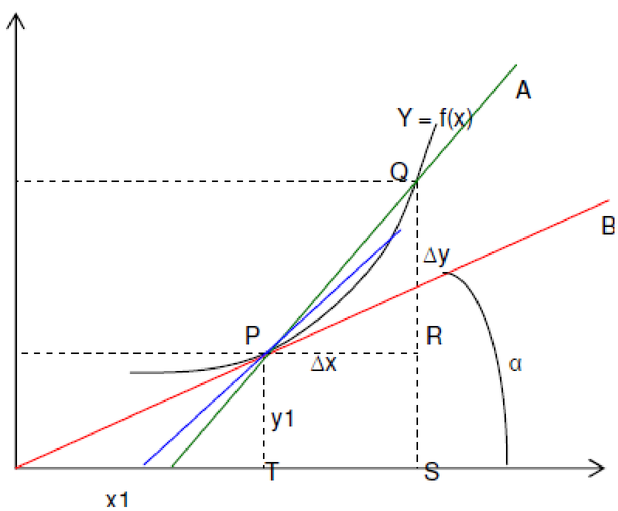
Saberes procedimentales

1. Emplea de manera sistemática conceptos algebraicos, geométricos, trigonométricos, de geometría analítica y del cálculo diferencial.
2. Interpreta adecuadamente la relación de dependencia que se establece entre dos variables, así como la razón de cambio entre sus valores.

A Concepto Geométrico y Físico de la derivada

La derivada de una función se representa geométricamente de la siguiente manera:

Sea la recta secante PQ que pasa por el punto fijo (x, f(x)) y el punto móvil (x+h, f(x+h)). Si el punto móvil Q se acerca sobre la curva cada vez más al punto P, la recta secante se parece cada vez más a la recta tangente en P. Cuando esto sucede, el valor h se acerca cada vez más a cero $(h \to 0)$. Entonces la derivada de la función (m_{tg}) es el valor al que se aproxima m_s cuando el valor de h se acerca a cero. Este valor se denomina límite de m_s cuando h tiende a cero y se escibe de la siguiente manera:



Note que:

(A) Es la tangente a la curva que pasa por P y Q

(B) Es la tangente a la curva en el punto (P) al acercarse al punto (Q) hacia (P)

El incremento Δx se hará más pequeño tanto como se quiera y cuando $\Delta x \to 0$ la secante girará y tendrá como límite a tangente, así

$$\lim_{h \to 0} m_s = m_{tg} = f'(x)$$

Pero como $m_s = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, entonces la derivada es:

$$f'(x) = m_{tg} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

El valor de la derivada en cualquier punto de la curva, es igual a la pendiente de la tangente a la curva en dicho punto.

Ejemplos

1. Sea la función $y = x^2$, calcular la pendiente de la tangente cuando: x=0, 1, y 2.

$$y' = 2x = m$$

$y'(0) = 2(0) = 0 \qquad tan\theta = 0 \qquad \theta = arctang\ 0 = 0°$

$y'(1) = 2(1) = 2 \qquad tan\theta = 2 \qquad \theta = arctang\ 2 = 63.43°$

y $\quad y'(2) = 2(2) = 4 \qquad tan\theta = 4 \qquad \theta = arctang\ 4 = 75.96°$

2. Calcular la pendiente de la tangente de $x^2 + y^2 = 25$ cuando x=0, 1, y 2.

Se deriva respecto de x, y se tiene $y' = -\frac{x}{y} = m$

De la función original se despeja y, $y = \sqrt{25 - x^2}$ y se calculan los valores de y para los valores dados de x:

$$y_0 = \sqrt{25 - 0^2} = 5$$

$$y_1 = \sqrt{25 - 1^2} = \sqrt{24}$$

$$y_2 = \sqrt{25 - 2^2} = \sqrt{21}$$

$m_0 = -\frac{x}{y} = \frac{0}{5} = 0 \qquad tan\theta = 0 \qquad \theta = arctang\ 0 = 0°$

$m_1 = -\frac{x}{y} = \frac{-1}{\sqrt{24}} = -0.0416 \qquad tan\theta = -0.0416 \qquad \theta = arctang - 0.0416 = 92.65°$

$m_2 = -\frac{x}{y} = \frac{-2}{\sqrt{21}} = -0.436 \qquad tan\theta = -0.436 \qquad \theta = arctang - 0.436 = 116.19°$

EJERCICIOS

Hallar la pendiente de la tangente en el punto dado

1. $4x^2 + 2y^2 = 34$ en (2,3)
2. $y = 8 - x^2$ en (4 , 3)
3. $y = \frac{4}{x+1}$ en x=1
4. $y = \frac{2}{x+3}$ en x=1
5. $y = (x^2 - 2)^3$ en x=3
6. $y = \sqrt{9 - 4x^2}$ en x=2
7. $y = \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ en x=3
8. $y = \frac{x^2+2}{2-x^2}$ en x=2
9. $y = x\sqrt{3 + 2x}$ en x=3

B Concepto de rectas tangentes y normales a un curva

La pendiente de la tangente a la curva es igual al valor de la derivada en cualquier punto. La pendiente de la normal a la curva es igual a la recíproca de la pendiente de la recta tangente a la curva.

Si una función f(x) tiene derivada finita (existe un punto x_0), $f'(x_0)$ en $x=x_0$ entonces la función y=f(x) tiene una tangente en el punto $P(x_0, y_0)$ cuya pendiente es $f'(x_0)=dy/dx=\tan(\theta)=m$.

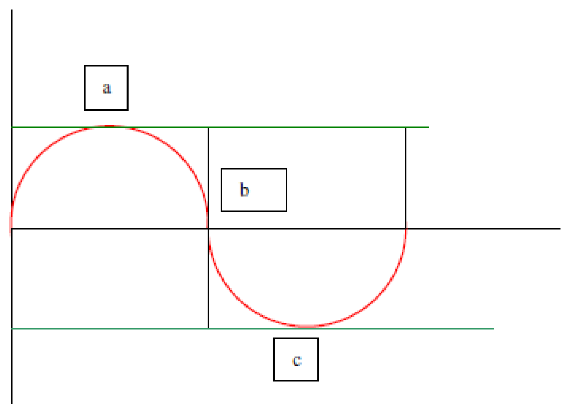
Recordemos de geometría analítica que la ecuación de una recta en su forma punto y pendiente es

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Por lo tanto, podemos emplear esta ecuación para calcular la tangente de una curva, considerando que P de coordenadas (x_0, y_0) en un punto de tangencia.

Cuando m=0 entonces la curva tiene una tangente paralela al eje de las x. (ver los puntos a y c de la siguiente gráfica).

Cuando m=∞ entonces la curva tiene tangente perpendicular al eje de las x (ver el punto b de la siguiente gráfica).



Como la normal es la línea recta perpendicular a la tangente en el punto de tangencia, se tiene que el valor de su pendiente es $m_n = -\frac{1}{m_t}$ entonces la ecuación de la normal es:

$$y - y_0 = -\frac{1}{m_t}(x - x_0)$$

Ejemplo Hallar la ecuación de la tangente y la normal en el punto (2 , 2) de la función $y = x^3 - 3x$

$$y' = 3x^2 - 3$$

Valorando para x=2, m=9

En la ecuación de la recta $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - 2 = 9(x - 2)$$

$$9x - y - 16 = 0$$

Ecuación de la normal $y - y_0 = -\frac{1}{m_t}(x - x_0)$

$$y - 2 = -\frac{1}{9}(x - 2)$$

$$x + 9y - 20 = 0$$

EJERCICIOS

A. Hallar la ecuación de la tangente y la normal en el punto dado

1. $4x^2 + 2y^2 = 34$ en el punto (2 , 3)
2. $x^2 + y^2 = 25$ en el punto (4 , 3)
3. $x^2 - y^2 = 7$ en el punto (4 , -3)
4. $9x^2 + 16y^2 = 52$ para x=2
5. $y = x^{5/2}$ para (4 , 32)

B. Hallar el punto o los puntos en que la pendiente m=0

1. $4x^2 + 2y^2 = 34$
2. $x^2 + y^2 = 25$
3. $y = x^4 - 6x^2 + 4$
4. $y = 2x^4 - 4x^3 + 2x^2$
5. $y = x^3 - 4x^2 + 5x$

C Funciones Crecientes y decrecientes

Una función y = f(x) se llama *función creciente* si aumenta (algebraicamente) cuando x aumenta. Una función y = f(x) se llama *función decreciente* si disminuye (algebraicamente) cuando x aumenta.
Una función es creciente cuando su derivada es *positiva*; es decreciente cuando su derivada es *negativa*.

Ejemplo

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x + 5$$

$$y' = x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1)$$

Para x < 1 (y´) es positiva la función (y) es creciente

Para 1 < x < 4 (y´) es negativa la función (y) es decreciente

Para x > 4 (y´) es positiva la función (y) es creciente

D Concepto de máximo y mínimo de una función

Las condiciones generales para máximos y mínimos de f(x) son:

- f(x) es un máximo si f ’(x) =0 y f ’(x) cambia de signo pasando de + a -
- f(x) es un mínimo si f ’(x) =0 y f ’(x) cambia de signo pasando de - a +

Cálculo de máximos y mínimos de una función:

- **PRIMER PASO**. Se calcula la primera derivada de la función
- **SEGUNDO PASO**. Se iguala la primera derivada a cero, y se hallan las raíces reales de la ecuación resultante. Estas raíces son los *puntos críticos* de la variable.
- **TERCER PASO**: Se tienen diferentes formas de saber si el punto crítico es mínimo o máximo, algunas de ellas son las siguientes:

a) Se consideran los valores críticos uno por uno, y se calculan los signos de la primera derivada, en primer lugar para un valor un poco menor que el punto crítico y después para un valor un poco mayor que él. Si el signo de la derivada es primeramente + y después -, la función tiene un máximo para este punto crítico de la variable; en caso contrario, tiene un mínimo. Si el signo no cambia, la función no tiene ni máximo ni mínimo para el valor crítico considerado.
b) Sustituye los puntos críticos en la función primitiva, encontrados los valores de la función, se observan los valores obtenidos y solamente se observa cual es mayor y cual es menor. Si solo se tiene un punto crítico, se toma un punto del dominio y se sustituye en la función primitiva, se analiza el valor obtenido con el obtenido del punto crítico, y así determinar si es máximo o mínimo.
c) CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA: Las condiciones suficientes para máximos y mínimos de f(x) correspondientes a valores críticos de la variable son las siguientes:
   - f(x) es un máximo si f ‘(x) = 0 y f ‘(x) y f ’’(x) es negativa.
   - f(x) es un mínimo si f ‘(x) = 0 y f ‘(x) y f ’’(x) es positiva.

Ejemplo $y = x^3 - 3x^2$

Primer paso: $y' = 3x^2 - 6x$

Segundo paso: $3x^2 - 6x = 0$

Aplicar factor común $(3x)(x-2) = 0$

Iguala a cero los dos factores $3x = 0$ $x - 2 = 0$

Resolver $x = 0$ $x = 2$ Puntos críticos

Tercer paso: utilizando la segunda forma del tercer paso se tiene:

$y(0) = 0$ y $y(2) = -4$, como 0 es mayor que -4

$(0,0)$: *es un punto máximo*

$(2,-4)$: *es un punto mínimo*

EJERCICIOS En las siguientes funciones encontrar los puntos en los que existe máximo o mínimo

1. $y = x^4 - 4x^3$
2. $y = x^3 + 4x^2 - 4x - 8$
3. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$
4. $f(x) = (2-x)^3$
5. $f(x) = (x^2 - 4)^2$
6. $g(x) = x^2 + \frac{27}{x}$
7. $h(x) = -20 + 5x + 7x^2 + 2x^3$
8. $y = \frac{bx}{x^2 + b^2}$
9. $y = \frac{x}{x+1}$

E	**Conceptos de concavidad de la gráfica de una función, punto de inflexión y de optimización**

Un punto de inflexión en una curva es el que separa arcos que tienen su concavidad en sentidos opuestos. Un punto donde una curva cambia su dirección de concavidad se llama punto de inflexión.
Para obtener el punto de inflexión en una función se siguen los siguientes pasos:

- Obtener la primera derivada
- Obtener la segunda derivada
- Igualar a 0 la segunda derivada y obtener los valores que satisfacen la ecuación
- Asigne valores a la variable independiente, primero un poco menor al crítico encontrado en el punto anterior, y substitúyalo en la segunda derivada, observando solamente si es (+) o (-). En seguida asigne valores a la variable independiente un poco mayor al valor crítico y substitúyalo en la segunda derivada, observando solamente si es (+) o (-).
- Si el primero es (+) y después (-) o viceversa, entonces existe un punto de inflexión para los valores encontrados en la segunda derivada.

Pasos para examinar el sentido de la concavidad:

- **PRIMER PASO**. Se calcula f ''(x)
- **SEGUNDO PASO**. Se iguala a cero f ''(x), se resuelve la ecuación resultante y se consideran las raíces reales de la ecuación los puntos de inflexión (pasos anteriores).
- **TERCER PASO**. Se analiza la segunda derivada a partir de los puntos de inflexión. Como un punto de inflexión es donde la curva cambia de dirección de concavidad, se toma un valor de la izquierda y uno de la derecha del punto de inflexión y se sustituyen en la segunda derivada:
  - Cuando f ''(x) es positivo, la curva es cóncava hacia arriba.
  - Cuando f ''(x) es negativo, la curva es cóncava hacia abajo.

Ejemplo En las funciones siguientes encontrar los puntos de inflexión y sus concavidades

1. $y = 1 - 3x + 5x^2 - x^3$

Primer derivada $y' = -3 + 10x - 3x^2$

Segunda derivada $y'' = 10 - 6x$

Igualar a cero $10 - 6x = 0$

Resolver la ecuación $-6x = -10$

$x = \frac{10}{6}$=1.66 Punto de inflexión

Valor x=0 (izquierda de PI): $y''(0) = 10 - 0 = 10$ de $\left(-\infty, \frac{10}{6}\right)$ *es cóncava hacia arriba*

Valor x=2 (derecha de PI): $y''(2) = 10 - 12 = -2$ de $\left(\frac{10}{6}, \infty\right)$ *es cóncava hacia abajo*

2. $y = x^4 - 4x^3$

Primer derivada $y' = 4x^3 - 12x^2$

Segunda derivada $y'' = 12x^2 - 24x$

Igualar a cero $12x^2 - 24x = 0$

Resolver la ecuación $(12x)(x-2) = 0$

Igualar a 0 los dos factores $12x = 0$ $x - 2 = 0$

$x = 0$ y $x = 2$ Puntos de inflexión

Ubicamos los puntos de inflexión en la recta para determinar los intervalos de concavidad

0 2

Valor x=-1 (izquierda de 0): $y''(-1) = 12 + 24 = 35$ de $(-\infty, 0)$ *es cóncava hacia arriba*

Valor x=1 (derecha de 0): $y''(1) = 12 - 24 = -12$ de $(0, 2)$ *es cóncava hacia abajo*

Valor x=3 (derecha de 2): $y''(3) = 108 - 72 = 36$ de $(2, \infty)$ *es cóncava hacia arriba*

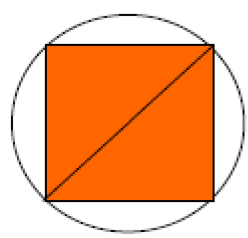
D Aplicaciones de máximo y mínimos a problemas prácticos

La aplicación de la derivada puede ser por ejemplo a problemas que implique analítica (puentes), geometría (área, volumen), físicos (velocidad, inducción), economía (eficiencia, costos), etc.

Ejemplos

1. Calcular el área del rectángulo máxima que se puede inscribir en un círculo de radio r=5cm

De la figura
Si r=5, d=10cm
La hipotenusa del rectángulo es el diámetro
A longitud de un cateto es x
La longitud del otro cateto es: $y = \sqrt{100 - x^2}$



El área del rectángulo es:

$A = xy$

$A = x * \sqrt{100 - x^2}$

Para máximo o mínimo, se deriva el área interior

$$A' = \frac{x(-2x)}{2\sqrt{100 - x^2}} + \sqrt{100 - x^2}(1)$$

$$A' = \frac{-x^2 + 100 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$\frac{-x^2 + 100 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0$$

$$100 - 2x^2 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{50} = \pm 7.071$$

Solo se toma el valor positivo ya que el negativo carece de sentido por la naturaleza del problema.

En base al cálculo del signo de la derivada deducir si es máximo o mínimo:

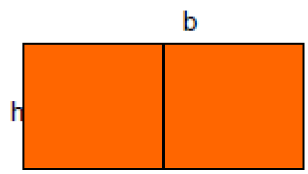
$$y = \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100 - 50} = 7.071$$

Conclusión: es un rectángulo.

2. Se desea construir una valla alrededor de un campo rectangular, y dividirla en dos parcelas por otra valla paralela a uno de sus lados. Si el área del campo es de 2400 m^2, hallar la razón de los lados y la longitud de cada uno de ellos para que la longitud total de las vallas sea mínima.

De la figura:

Área del rectángulo $A = bh$ A=2400
Altura $h = A/b = 2400/b$
longitud de vallas $P = 2b$+3h
sustituyendo $P02b + 3A/b$



Derivando la longitud de vallas P con respecto a (b), siendo A el área total para obtener una fórmula general para este caso particular:

$$P' = 2 + \frac{-3A}{b^2} = 0$$

$$2b^2 = 3A$$

$$b = \sqrt{\frac{3A}{2}}$$

Como $$h = \frac{A}{b} = \frac{A}{\sqrt{\frac{3A}{2}}}$$

Razón $$\frac{h}{b} = \frac{\frac{A}{\sqrt{\frac{3A}{2}}}}{\sqrt{\frac{3A}{2}}} = \frac{A}{\frac{3A}{2}} = \frac{2}{3}$$

Fórmula general $h = \frac{2b}{3}$

En forma particular $h = \frac{2400}{b} = \frac{2b}{3}$ resolviendo la ecuación anterior

$$b = \sqrt{\frac{3 * 2400}{2}} = 60m$$

$$h = 40m$$

Derivada como rapidez de variación

Sea la función $y = x^2$

Dando los respectivos incrementos $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$

El incremento es $\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$

La razón de incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$ es la rapidez media de variación de (y) con respecto a (x)

Cuando $\Delta x \rightarrow 0$ y tomando límites:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$ es la rapidez instantánea de la variación de (y) con respecto a (x) para un valor de (x) definido

Así, cuando (S) es la distancia media en una recta dada y ΔS es un incremento dado en un incremento de tiempo Δt, la razón de incrementos $\Delta S/\Delta t$ = *velocidad media* y dS/dt = *es la velocidad en un instante cualquiera*

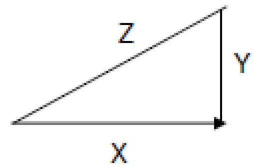
Así, la ***velocidad*** se puede definir como:

la rapidez de cambio de S con respecto a t (tiempo), en un instante cualquiera como el límite de la velocidad media cuando Δt tiende a cero.

Ejemplos

1. Un hombre camina a 7.5km/h hacia la base de una torre, que tiene 18m de altura. Con qué rapidez se acerca a la cima de la torre cuando su distancia a la base de la torre es de: a) 24m, b)18m, c)1m.

X = Variable
Y = Constante
Z = Variable



EN LA FIGURA

a).- $X = 24, \ldots\ldots Y = 18, \ldots\ldots Z = \sqrt{24^2 + 28^2} = 30$ m

$Z^2 = X^2 + Y^2$ DERIVANDO CON RESPECTO AL TIEMPO (t) EN FORMA IMPLICITA

$2Z\frac{dZ}{dt} = 2X\frac{dX}{dt} + 2Y\frac{dY}{dt}$ (Y) ES CONSTANTE

$\frac{dZ}{dt} = \frac{2X}{2Z}\frac{dX}{dt} + 0$ $\qquad Vx = \frac{dX}{dt} = 7.5$

$Vz = \frac{dZ}{dt} = \frac{24}{30}(7.5) = 6$ Km/hora

b).- $X = 18 \ldots\ldots Y = 18, \ldots\ldots Z = \sqrt{18^2 + 18^2} = 25.45$ m

$Z^2 = X^2 + Y^2$ DERIVANDO CON RESPECTO AL TIEMPO (t)

$2Z\frac{dZ}{dt} = 2X\frac{dX}{dt} + 2Y\frac{dY}{dt}$ (Y) ES CONSTANTE

$\frac{dZ}{dt} = \frac{2X}{2Z}\frac{dX}{dt} + 0$ $\qquad Vx = \frac{dX}{dt} = 7.5$

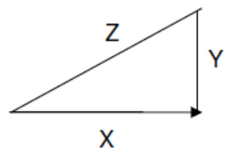
$Vz = \frac{dZ}{dt} = \frac{18}{25.45}(7.5) = 5.30$ Km/hora

c.- $X = 1 \ldots\ldots Y = 18, \ldots\ldots Z = \sqrt{1^2 + 18^2} = 18.02$

$Vz = \frac{dZ}{dt} = \frac{1}{18.02}(7.5) = 0.416$

2. Un bote está atado a una cuerda que esta arrollada alrededor de un torno situado a 7m más alto que el nivel del punto en que la cuerda está amarrada al bote. El bote se aleja a una velocidad de 3m/seg. Con qué rapidez se desarrolla el cordel cuando dista 10m del punto que está directamente debajo del torno y al nivel del agua.

X = Variable
Y = Constante
Z = Variable



En la figura

$X = 10, \ldots\ldots Y = 7, \ldots\ldots Z = \sqrt{10^2 + 7^2} = 12.20$ m

$Z^2 = X^2 + Y^2$ Derivando con respecto al tiempo (t)

$2Z\frac{dZ}{dt} = 2X\frac{dX}{dt} + 2Y\frac{dY}{dt}$ (Y) es constante

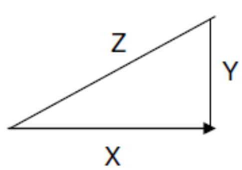
$\frac{dZ}{dt} = \frac{2X}{2Z}\frac{dX}{dt} + 0$

$Vx = \frac{dX}{dt} = 3$

$Vz = \frac{dZ}{dt} = \frac{10}{12.20}(3) = 2.46$ m/seg.

3. Un lanchón se acerca a un muelle mediante un cable arrollado a un anillo que se encuentra en la parte superior del muelle; el cable se enrolla con un torno situado en la cubierta del lanchón a razón de 2.4m/min. La cubierta del lanchón está a 4.5m por debajo de la parte superior del muelle. Con qué rapidez se mueve el lanchón hacia el muelle cuando dista 6m.

X = Variable
Y = Constante
Z = Variable



En la figura:

$X = 6, \ldots\ldots Y = 4.5, \ldots\ldots Z = \sqrt{6^2 + 4.5^2} = 7.5$ m

$Z^2 = X^2 + Y^2$ Derivando con respecto al tiempo (t)

$2Z\frac{dZ}{dt} = 2X\frac{dX}{dt} + 2Y\frac{dY}{dt}$ (Y) Es constante

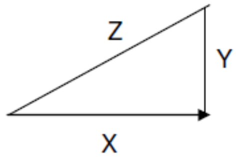
$\frac{dX}{dt} = \frac{2Z}{2X}\frac{dZ}{dt} + 0$

$Vz = \frac{dZ}{dt} = 2.4$

$Vx = \frac{dX}{dt} = \frac{7.5}{6}(2.4) = 3$ m/min

4. Uno de los extremos de una escalera de 15m se apoya contra una pared vertical, levantada en un piso horizontal. Suponga que se empuja el pie de la escalera alejándola de la pared a razón de 0.9m/min:
    a. Con qué velocidad baja la extremidad superior de la escalera cuando su pie dista 4m de la pared
    b. Cuándo se moverán a la misma velocidad los dos extremos de la escalera
    c. Cuándo baja la extremidad superior de la esclarea a razón de 1.2m/min

X = Variable
Y = Variable
Z = Constante



En la figura:

a).- $X = 4 ..... Z = 15, ... Y = \sqrt{15^2 - 4^2} = 14.45$ m

$Z^2 = X^2 + Y^2$ Derivando con respecto al tiempo (t)

$2Z\frac{dZ}{dt} = 2X\frac{dX}{dt} + 2Y\frac{dY}{dt}$ (Z) Es constante

$0 = 2X\frac{dX}{dt} + 2Y\frac{dY}{dt}$

$Vx = \frac{dX}{dt} = 0.9$

$Vy = \frac{dY}{dt} = -\frac{4}{14.45}(0.9) = 0.25$ m/mIn

b).- Para que se muevan a la misma velocidad los extremos de la escalera:

$Vx = Vy$

$Z^2 = X^2 + Y^2$ Derivando con respecto al tiempo (t)

$2Z\frac{dZ}{dt} = 2X\frac{dX}{dt} + 2Y\frac{dY}{dt}$ (Z) Es constante.

$0 = 2X\frac{dX}{dt} + 2Y\frac{dY}{dt}$

$\frac{Vx}{Vy} = 1 = -\frac{Y}{X}$ Por lo que $|X| = |Y|$

$15^2 = \sqrt{X^2 + Y^2}$

$X^2 = \sqrt{\frac{15^2}{2}}$

$X = 10.60$ m

$Y = 10.60$ m

c).- Cuando baja la extremidad superior de la escalera a razón de 1.2 m/min

$\frac{Vx}{Vy} = \frac{0.9}{1.2} = -\frac{Y}{X}$ $Y = 0.75X$

$15^2 = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{X^2 + (0.75X)^2}$

$X = 12$ m

$Y = 9$ m

5. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba, se mueve según la ley ($S = 25t - 5t^2$). S=m y t=seg. Hallar:
   a. Su posición y velocidad después de 2seg y después de 3 seg
   b. Hasta que altura ascenderá
   c. A que distancia se moverá en el cuarto segundo y en el quinto segundo

Para t=2seg:

$S = 25t - 5t^2$

$S = 25(2) - 5(4) = 50 - 20 = 30m$

$\frac{dS}{dt} = Vs = 25 - 10t$

$Vs = 25 - 10(2) = 25 - 20 = 5m/seg$

Para t=3seg:

$S = 25t - 5t^2$

$S = 25(3) - 5(9) = 75 - 45 = 30m$

$\frac{dS}{dt} = Vs = 25 - 10t$

$Vs = 25 - 10(3) = 25 - 30 = -5m/seg$

b) Punto máximo

$\frac{dS}{dt} = Vs = 25 - 10t = 0$

$t = \frac{25}{10} = 205seg$

$Smax = 25t - 5t^2 = 25(2.5) - 5(6.25) = 62.5 - 32.5 = 31.25m$

c) $S = 25t - 5t^2$

Para t=4seg $\quad S = 25(4) - 5(16) = 100 - 80 = 20m$

Para t=5seg $\quad S = 25(5) - 5(25) = 125 - 125 = 0m$

6. La altura S=m alcanzada en t=seg por un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad V=m/seg, está dada por la fórmula $S = V_1t - (1/2)gt^2$ obtener una fórmula para la mayor altura que el cuerpo alcanza

$$S = V_1t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\frac{dS}{dt} = V_1 - gt$$

$$S = V_1\frac{V_1}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{V_1}{g}\right)^2 = \frac{V_1^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{V_1^2}{g}$$

$$S = \frac{V_1^2}{2g}$$

EJERCICIOS

1. Se desea construir una caja abierta rectangular por la parte superior que contenga $2000cm^3$ de volumen, cuáles deben ser las dimensiones para que el costo de hacerla con lámina sea mínimo

2. Se desea construir un baño rectangular que contenga $18m^3$ de volumen, cuáles deben ser las dimensiones para que el costo de hacerlo sea mínimo. Si el piso cuesta $\$200m^2$ y los muros $\$100m^2$, no incluye el techo.

3. Una escalera ha de pesar por el borde superior de un muro de 1m de altura y apoyarse sobre una pared de H metros de altura. Di el muro y la pared distan 1.5m. Hallar la longitud mínima de la escalera.

4. Una persona de 1.8m de altura camina a 0.5m/seg. Alejándose en línea recta de la luz de una luminaria que eta a 6m de altura sobre el suelo. Con qué velocidad está cambiando la longitud de su sombra.

5. Un niño está haciendo volar una cometa a 50m de altura. Si la cometa se mueve horizontalmente alejándose del niño a una velocidad de 4m/seg. A qué velocidad está soltando sedal cuando la cometa está a 250m de él. Considere la altura constante.

6. Se está vaciando a razón de $10cm^3$/seg un depósito cónico con su punta hacia abajo. Si es de 20cm e radio y 50cm de altura. A qué ritmo está bajando el nivel del agua cuando la altura tomada de la parte baja es de 30cm.

7. Las aristas de un tetraedro regular miden 10cm. Si aumenta 0.1 cm por minuto, calcular la rapidez de aumento del volumen

8. Un proyectil se lanza con una velocidad inicial Vo=200m/seg y con un ángulo de inclinación de 60°. Calcular:

   a. Distancia máxima (X) alcanzada
   b. Altura máxima (H) alcanzada
   c. Tiempo en alcanzar distancia máxima (tx)
   d. Tiempo en alcanzar altura máxima (th)
   e. Calcular para t=5seg, la rapidez y dirección del proyectil